Keine Ahnung von Sinuskurven

Was bedeutet denn

$$y = k \cdot \sin(ax + b) + c$$

?

Datei Nr. 16145

Stand 3. Mai 2020

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Ich habe hier meinem Einführungstext 16140 Trigonometrische Funktionen einige Seiten entnommen und daraus einen kompakten Wiederholungstext gemacht.

Die Texte 16141 und 16150 enthalten weitere Kurvenaufgaben!

Die Aufgabe, Sinuskurven wie $y = 2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ zu analysieren lernt man in Kasse 10. Und dennoch können die Schüler schon nach kurzer Zeit nichts mehr damit anzufangen.

Hier kann man sich wieder informieren.

Inhalt

1 Wiederholung zu $y = \sin(x)$ und $y = \cos(x)$

1.1 rägt man Sinuswerte in Abhängigkeit vom Winkel ab, so ist es sinnvoll, als Winkelmaß das Bogenmaß zu verwenden. Dieses verwendet die Länge des zum Winkel gehörenden Kreisbogens mit dem Radius 1 als Maß für den Winkel. Die Umrechnung der Maßeinheiten (Gradmaß in Bogenmaß) geht durch eine Formel:

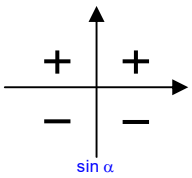
Die Länge eines Kreisbogens wird durch $b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \underset{r=1}{=} \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi$ berechnet.

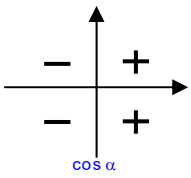
Als Argument für Funktionen sagt man x statt b: $x = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi$.

1.2 Für Sinus und Kosinus sollte man diese Werte kennen:

Gradmaß	Bogenmaß	sin x	cos x
$x = 0^\circ$	$x = 0$	0	1
$x = 30^\circ$	$x = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$x = 45^\circ$	$x = \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$x = 60^\circ$	$x = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$x = 90^\circ$	$x = \frac{\pi}{2}$	1	0
$x = 180^\circ$	$x = \pi$	0	-1
$x = 270^\circ$	$x = \frac{3}{2}\pi$	-1	0
$x = 360^\circ$	$x = 2\pi$	0	1

Die Werte für Winkel im 2., 3. und 4. Feld berechnet man, indem man den Differenzwinkel zur x-Achse verwendet, davon Sinus bzw. Kosinus berechnet und ein Vorzeichen dieser Tabellen verwendet:





Beispiele:

$\sin\frac{1}{3}\pi = \sin 120^\circ = +\sin(180^\circ - 120^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **2. Feld**

$\sin\frac{5}{6}\pi = \sin 210^\circ = -\sin(210^\circ - 180^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ **3. Feld**

$\sin\frac{11}{6}\pi = \sin 330^\circ = -\sin(360^\circ - 330^\circ) = -\sin(30^\circ) = -\frac{1}{2}$ **4. Feld**

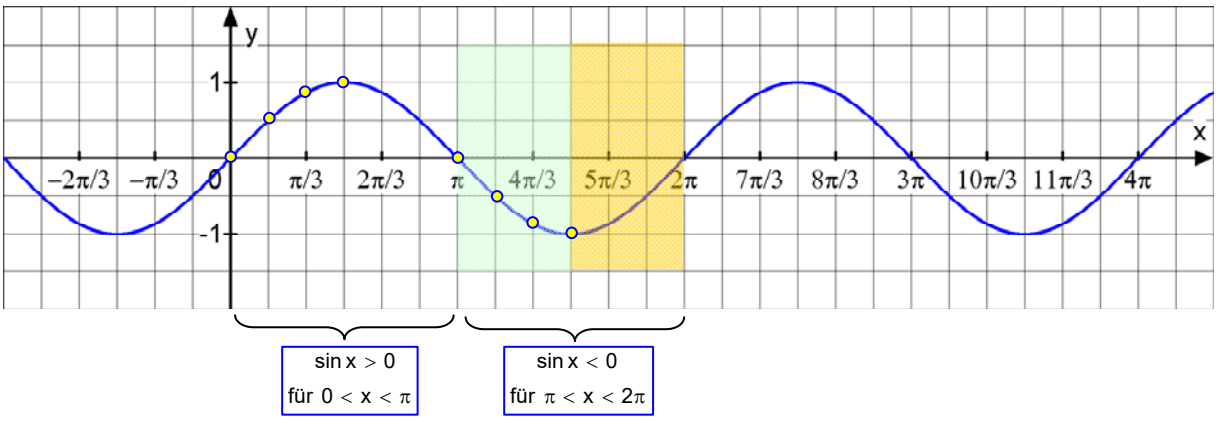
$\cos\frac{1}{3}\pi = \cos 120^\circ = -\cos(180^\circ - 120^\circ) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$ **2. Feld**

$\cos\frac{5}{6}\pi = \cos 210^\circ = -\cos(210^\circ - 180^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ **3. Feld**

$\cos\frac{11}{6}\pi = \cos 330^\circ = +\cos(360^\circ - 330^\circ) = +\cos(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ **4. Feld**

Für das schnelle Zeichnen einer Sinuskurve verwendet man folgende Tabelle:

cm	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
Grad	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
sin(x)	0	0,5	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 0,87	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 0,87	0,5	0	-0,5	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ −0,87	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ −0,87	-0,5	0



So zeichnet man eine Sinuswelle:

Man wählt den „Startpunkt“ im Ursprung.

Dann geht man 1 Kästchen nach rechts ($\frac{1}{6}\pi$ bzw. 30°)

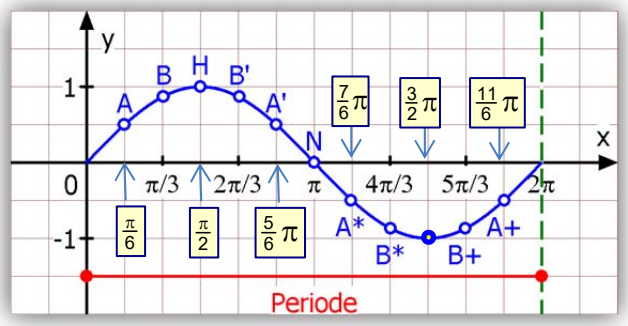
und um 0,5 nach oben (A).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{1}{3}\pi$ bzw. 60°)

und um $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}87$ nach oben (B).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{1}{2}\pi$ bzw. 90°)

und um 1 nach oben (Hochpunkt H).



Ab jetzt wiederholen sich die Werte wie folgt:

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{2}{3}\pi$ bzw. 120°) und um $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}87$ nach oben (B‘).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{5}{6}\pi$ bzw. 150°) und um 0,5 nach oben (A‘).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts (π bzw. 180°) und um 0 nach oben (Nullstelle N).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{7}{6}\pi$ bzw. 210°) und um 0,5 nach unten (A*).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{4}{3}\pi$ bzw. 240°) und um $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}87$ nach unten (B*).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{3}{2}\pi$ bzw. 270°) und um 1 nach unten (Tiefpunkt).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{5}{3}\pi$ bzw. 300°) und um $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}87$ nach unten (B+).

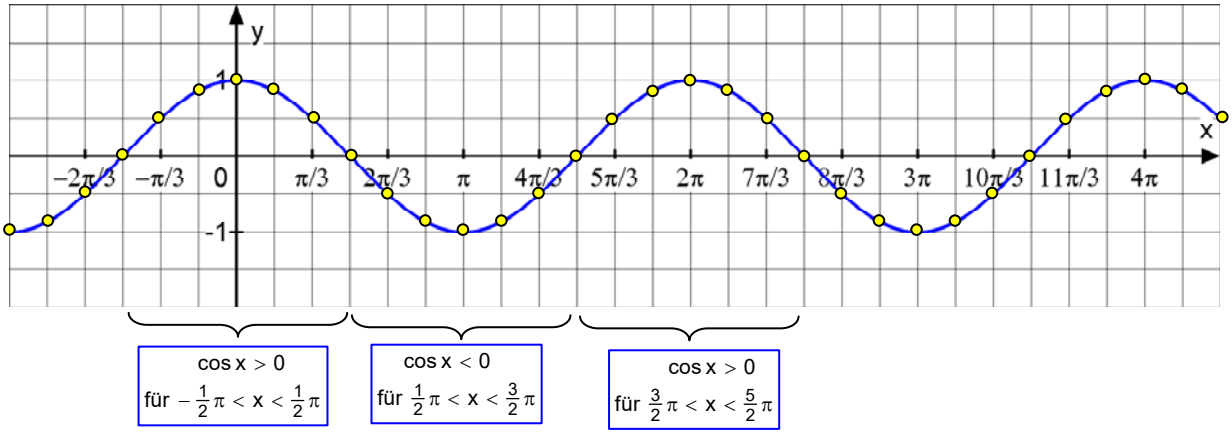
Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{11}{6}\pi$ bzw. 330°) und um 0,5 nach unten (A+).

In den 4 Quadranten treten jeweils Punkte A mit der y-Koordinate $\pm\frac{1}{2}$ auf und Punkte B mit $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Man muss sich also nur 4 Werte merken, die man angeeigneter Stelle abtragen muss.

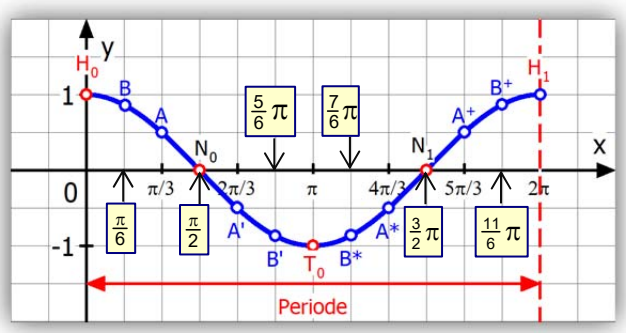
Die Sinuskurve hat die **Periode** 2π . Mögliches Periodenintervall: $[0\,;2\pi]$.

Für das schnelle Zeichnen einer Kosinuskurve nimmt man folgende Tabelle:

cm	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
Grad	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
cos(x)	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 0,87	0,5	0	-0,5	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ −0,87	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ −0,87	-0,5	0	0,5	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 0,87	1



So zeichnet man eine Kosinuswelle:



Man wählt den „Startpunkt“ in $H_o(0\,|\,1)$.

Dann geht man 1 Kästchen nach rechts ($\frac{1}{6}\pi$ bzw. 30°)

Dort ist der Wert $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}87$ (B)

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{1}{3}\pi$ bzw. 60°)

und um 0,5 nach oben (A).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{1}{2}\pi$ bzw.90°)

Dort schneidet die Kosinuskurve die x-Achse (N_o).

Ab jetzt wiederholen sich die Werte wie folgt:

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{2}{3}\pi$ bzw. 120°) und um 0,5 nach unten (A').

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ($\frac{5}{6}\pi$ bzw. 150°) und um $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}87$ nach unten (B').

Weiter um 1 Kästchen nach rechts (π bzw.180°) und um 1 nach unten (Tiefpunkt T_o). usw.

In den 4 Quadranten treten jeweils Punkt A mit der y-Koordinate $\pm\frac{1}{2}$ auf und Punkte B mit $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Dies geschieht analog zur Sinuskurve. Man muss sich also im Grunde nur 4 Werte merken, die man an geeigneter Stelle abtragen muss.

Auch die Kosinuskurve hat ein Periodenintervall der Länge 2π, etwa dieses $[0\,;2\pi]$

2 Verschobene Sinuskurven

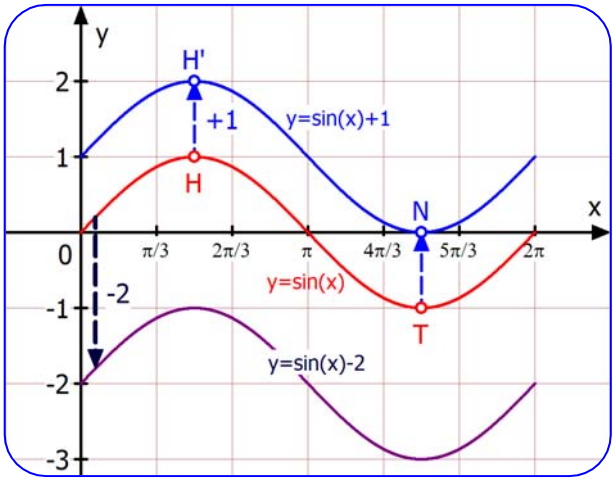
Die Gleichung $y = \sin(x) + d$ stellt eine Sinuskurve dar, die um d **in y-Richtung verschoben** ist.

a) $y = \sin(x) + 1$

ist die Gleichung einer um 1 in y-Richtung verschobenen Sinuskurve.

b) $y = \sin(x) - 2$

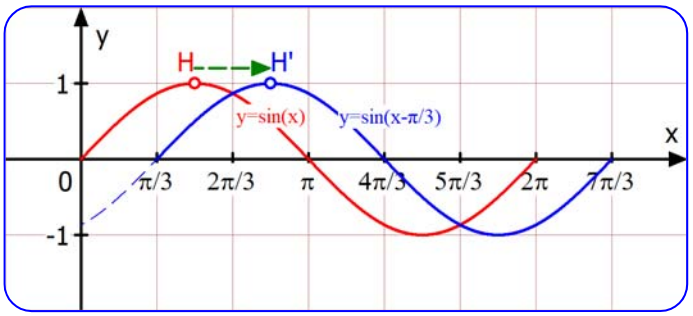
ist die Gleichung einer um -2 in y-Richtung (also um 2 nach unten) verschobenen Sinuskurve.



Die Gleichung $y = \sin(x - b)$ stellt eine Sinuskurve dar, die um b **in x-Richtung verschoben** ist.
Man beachte, dass bei Verschiebung in die positive x-Richtung das Minuszeichen wichtig ist!

c) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

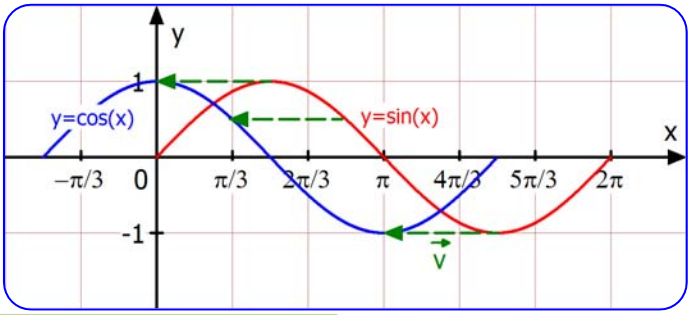
ist die Gleichung einer um $\frac{\pi}{3}$ in x-Richtung verschobenen Sinuskurve.



d) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

ist die Gleichung einer um $-\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung verschobenen Sinuskurve, also nach links.

Und das ist die Kosinuskurve!

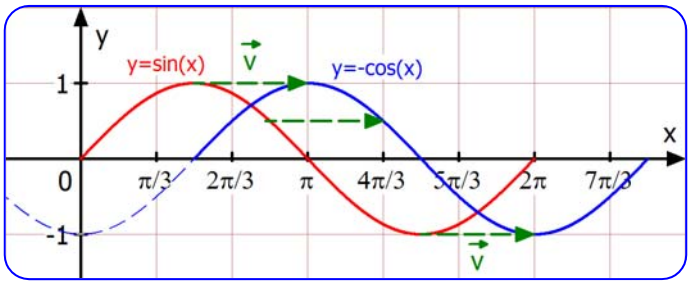


Wichtiger Hinweis:

Wird die Sinuskurve um $\frac{1}{2}\pi$ nach links verschoben, entsteht die Kosinuskurve: $\boxed{\sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(x)}$

Wird die Sinuskurve um $\frac{1}{2}\pi$ nach rechts verschoben, entsteht die „Minus-Kosinuskurve“: $\boxed{\sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = -\cos(x)}$

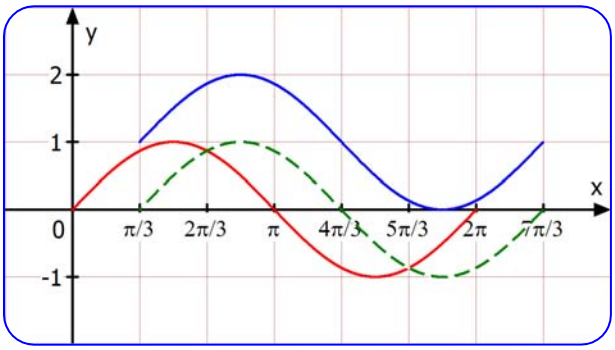
e) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$



Die Gleichung $y = \sin(x - b) + d$ stellt eine Sinuskurve dar, die um b in x-Richtung und um d in y-Richtung verschoben ist.

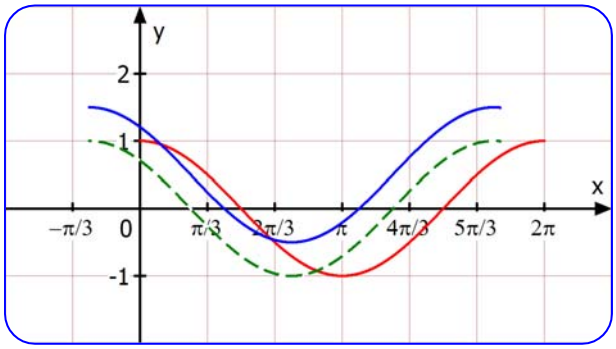
f) $y = \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) + 1$

Man erkennt die Verschiebung um $\frac{1}{3}\pi$ in x-Richtung zu $y = \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ (gestrichelt), und dann die Weiterverschiebung um 1 nach oben.

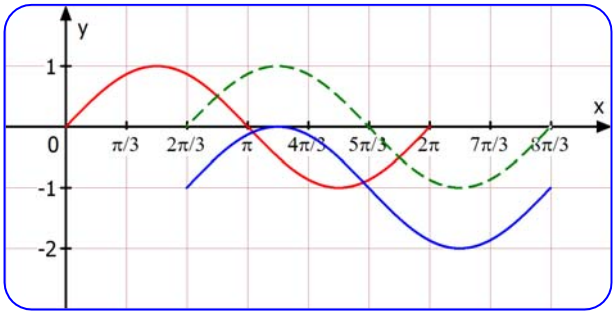


g) $y = \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) + \frac{1}{2}$

Man erkennt, dass $y = \cos(x)$ zuerst um $\frac{1}{4}\pi$ nach links zu $y = \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$ (gestrichelt) verschoben worden ist, und dann weiter um $\frac{1}{2}$ nach oben.



h) $y = \sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) - 1$

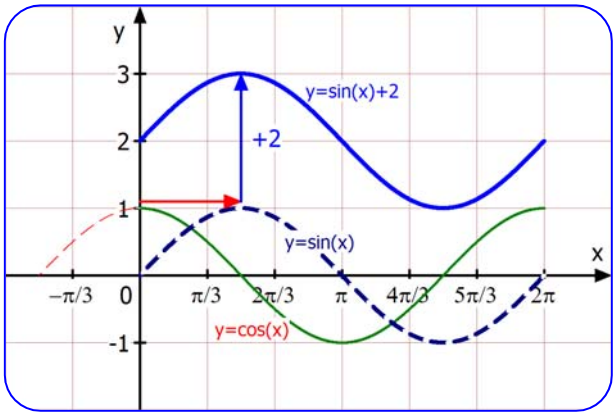


i) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$

Verschiebt man die Kosinuskurve um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts, entsteht die Sinuskurve:

$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$

Also hat die gegebene Kurve auch diese Gleichung: $y = \sin(x) + 2$



3 Gestreckte Sinuskurven

Wenn man die Kurve $y = \sin(x)$ in y-Richtung mit dem Faktor k streckt,
hat die Bildkurve die Gleichung $\mathbf{y = k \cdot \sin(x)}$.

Erklärung: Wenn man von der x-Achse aus streckt, werden die y-Koordinaten einfach k-mal so groß: $\overline{y} = k \cdot y$, aber die x-Koordinaten bleiben gleich: $\overline{x} = x$.

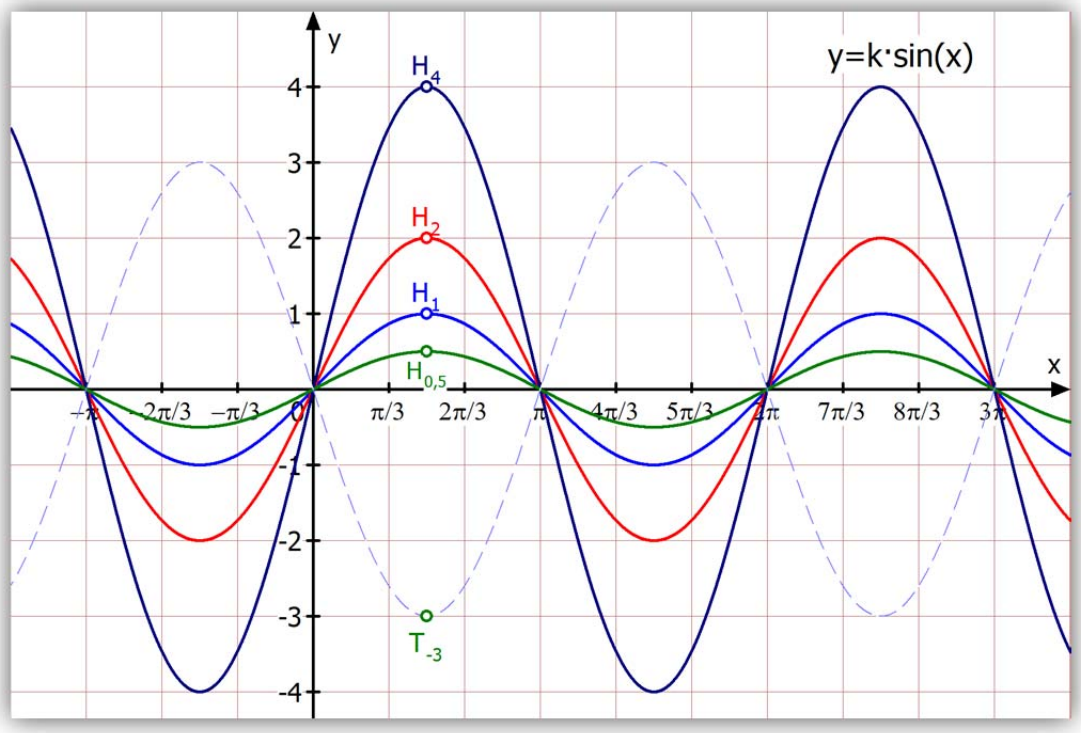
Man nennt das die Abbildungsgleichungen dieser Streckung: $\left\{\begin{array}{l}\overline{x} = x \\ \overline{y} = k \cdot y\end{array}\right\}$

Zum Berechnen der Gleichung der Bildkurve von $y = \sin(x)$ muss man die Abbildungsgleichungen umstellen, damit man sie einsetzen kann: $\left\{\begin{array}{l}x = \overline{x} \\ y = \frac{1}{k}\overline{y}\end{array}\right\}$

Gleichung der Bildkurve: $y = \sin(x) \rightarrow \boxed{\frac{1}{k}\overline{y} = \sin(\overline{x})}$ bzw. $\boxed{\overline{y} = k \cdot \sin(\overline{x})}$

Nach der Umrechnung werden die Querstriche nicht mehr benötigt.

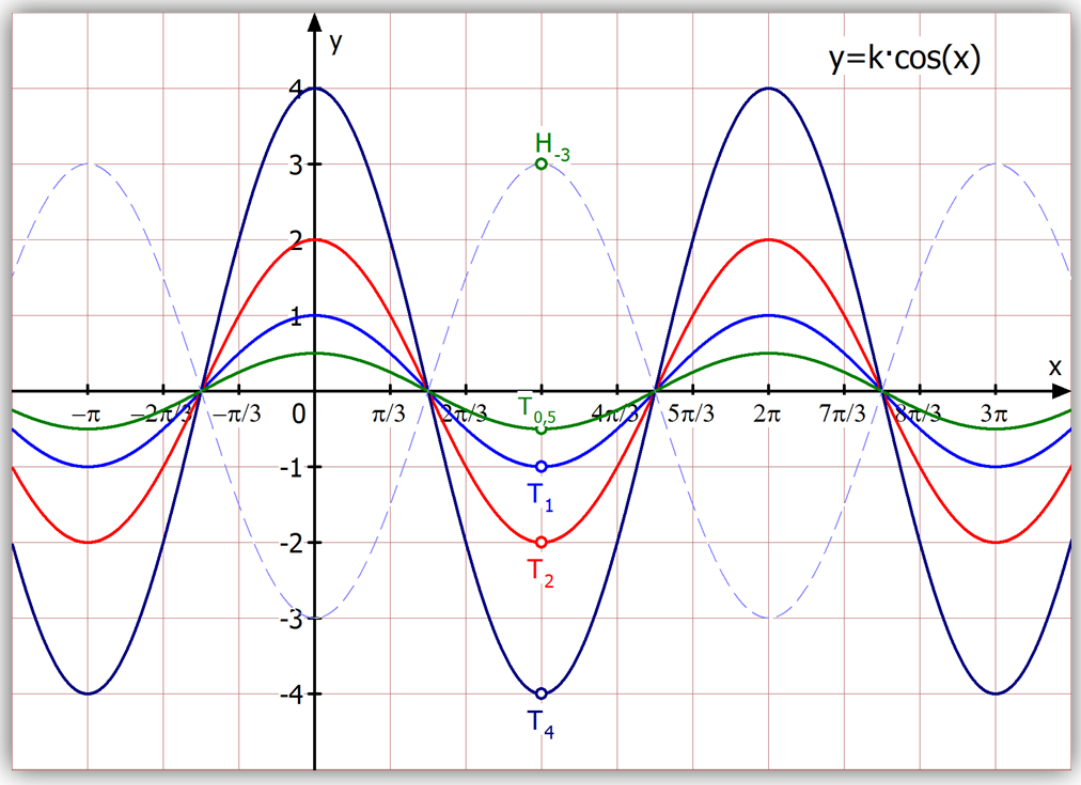
Beispiel 1 Streckungen von $y = \sin(x)$ in y-Richtung:



Diese Abbildung zeigt 5 Kurven der Schar $y = k \cdot \sin(x)$, die alle aus $y = \sin(x)$ durch Streckung in y-Richtung entstehen. Als Punkt-Merkmal ist ein Extrempunkt eingezeichnet:

$H_1\left(\frac{1}{2}\pi \mid 1\right)$	gehört zu $k = 1$,	also $y = \sin(x)$	(Urbild, nicht gestreckt)
$H_2\left(\frac{1}{2}\pi \mid 2\right)$	gehört zu $k = 2$,	also $y = 2 \cdot \sin(x)$	
$H_4\left(\frac{1}{2}\pi \mid 4\right)$	gehört zu $k = 4$,	also $y = 4 \cdot \sin(x)$	
$H_{0,5}\left(\frac{1}{2}\pi \mid 0,5\right)$	gehört zu $k = \frac{1}{2}$,	also $y = \frac{1}{2} \cdot \sin(x)$	(gestaucht da 0<k<1)
$T_{-3}\left(\frac{1}{2}\pi \mid -3\right)$	gehört zu $k = -3$,	also $y = -3 \cdot \sin(x)$	(gestreckt und gespiegelt)

Beispiel 2 Streckungen von $y = \cos(x)$ in y-Richtung:



Diese Abbildung zeigt 5 Kurven der Schar $y = k \cdot \cos(x)$, die alle aus $y = \cos(x)$ durch Streckung in y-Richtung entstehen. Als Punkt-Merkmal ist ein Tiefpunkt eingezeichnet:

$T_1(\pi \mid -1)$	gehört zu $k = 1$,	also $y = \cos(x)$	(Urbild, nicht gestreckt)
$T_2(\pi \mid -2)$	gehört zu $k = 2$,	also $y = 2 \cdot \cos(x)$	
$T_4(\pi \mid -4)$	gehört zu $k = 4$,	also $y = 4 \cdot \cos(x)$	
$T_{0,5}\left(\pi \mid -\frac{1}{2}\right)$	gehört zu $k = \frac{1}{2}$,	also $y = \frac{1}{2} \cdot \cos(x)$	(gestaucht, da 0<k<1)
$H_{-3}(\pi \mid 3)$	gehört zu $k = -3$,	also $y = -3 \cdot \cos(x)$	(gestreckt und gespiegelt)
	Wegen des negativen Streckfaktors hat diese Kurve einen Hochpunkt.		

Wenn man die Kurve $y = \sin(x)$ in x-Richtung mit dem Faktor k streckt,
hat die Bildkurve die Gleichung $\mathbf{y = \frac{1}{k} \cdot \sin(x)}$.

Erklärung: Wenn man von der y-Achse aus streckt, werden die x-Koordinaten k-mal so groß:
$\overline{x} = k \cdot x$, aber die y-Koordinaten bleiben gleich: $\overline{y} = y$.

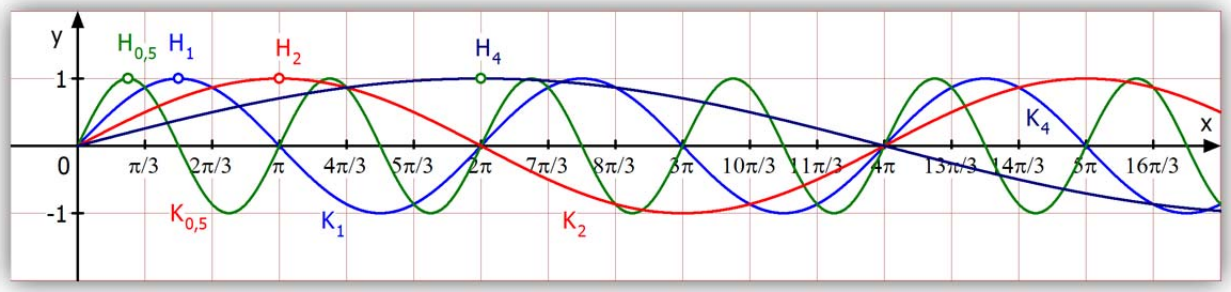
Man nennt das die Abbildungsgleichungen dieser Streckung: $\left\{\begin{array}{l}\overline{x} = k \cdot x \\ \overline{y} = y\end{array}\right\}$

Zum Berechnen der Gleichung der Bildkurve von $x = \sin(x)$ muss man die
Abbildungsgleichungen umstellen, damit man sie einsetzen kann: $\left\{\begin{array}{l}x = \frac{1}{k}\overline{x} \\ y = \overline{y}\end{array}\right\}$

Gleichung der Bildkurve: $y = \sin(x) \rightarrow \boxed{\overline{y} = \sin\left(\frac{1}{k}\overline{x}\right)}$

Nach der Umrechnung werden die Querstriche nicht mehr benötigt.

Beispiel 3 **Streckung von $y = \sin(x)$ in x-Richtung:**



Diese Abbildung zeigt 4 Kurven der Schar $y = \sin\left(\frac{1}{k}x\right)$, die alle aus $y = \sin(x)$ durch Streckung in x-Richtung mit dem Faktor k entstehen. Als Punkt-Merkmal ist je ein Hochpunkt eingezeichnet:

K_1 ist die nicht gestreckte Sinuskurve: $\boxed{y = \sin(x)}$, **mit der Periode** 2π.

K_2 wurde mit k = 2 in x-Richtung gestreckt: $\boxed{y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)}$, **mit der Periode** 4π

K_4 wurde mit k = 4 in x-Richtung gestreckt: $\boxed{y = \sin\left(\frac{1}{4}x\right)}$, **mit der Periode** 8π

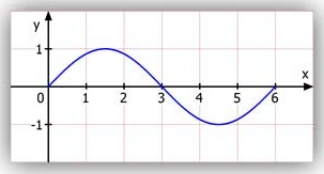
$K_{0,5}$ wurde mit $k = \frac{1}{2}$ in x-Richtung gestreckt: $\boxed{y = \sin(2x)}$, **mit der Periode** π

Da hier 0 < k < 1 ist, nennt man diese „Streckung“ eine Stauchung.

Hinweis: Streckungen in x-Richtung stellen eine häufige Fehlerquelle dar, denn Schüler vergessen schnell, dass der Steckfaktor hier der Kehrwert ist:
$y = \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ hat den Streckfaktor 3 und nicht $\frac{1}{3}$!

Wichtige Ergänzung: $y = \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ hat den Streckfaktor $k = \frac{3}{\pi}$. Dies ist wichtig, denn

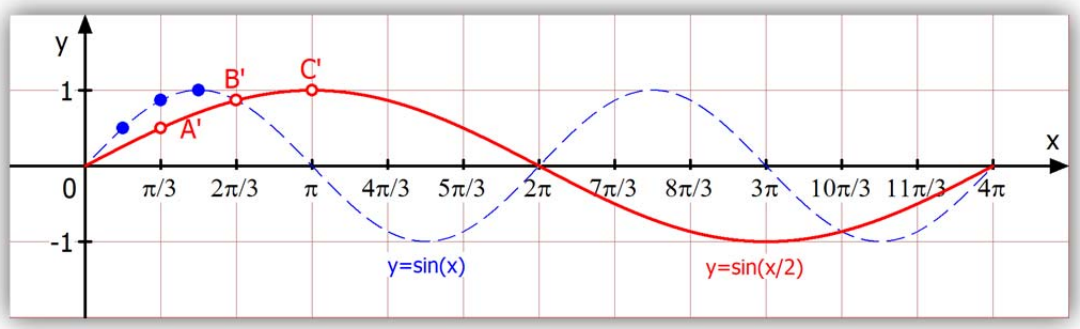
Damit hat die Kurve die Periodenlänge $\boxed{k \cdot 2\pi = \frac{3}{\pi} \cdot 2\pi = 6}$



Das Schaubild dieser Sinuskurve schneidet die x-Achse bei 0, 3 und 6.
Schüler zeichnen Sinuskurven oft mit diesem Maßstab, dass man $\pi \approx 3$ verwendet. Dann wurde also diese Kurve dargestellt.

Zeichen-Tipps:

Zum Zeichnen einer in x-Richtung gestreckten Sinus-Kurve benötigt man nur die vier charakteristischen Werte. Ich zeige es am Beispiel $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$, also mit k = 2:



Der erste Wert ist $\sin(0) = 0$. Der gilt auch für die gestreckte Kurve.

Der zweite Wert ist $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$.

Durch die Streckung wird der x-Wert verdoppelt: $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$. Punkt $A'\left(\frac{\pi}{3} \mid \frac{1}{2}\right)$.

Der dritte Wert ist $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}87$.

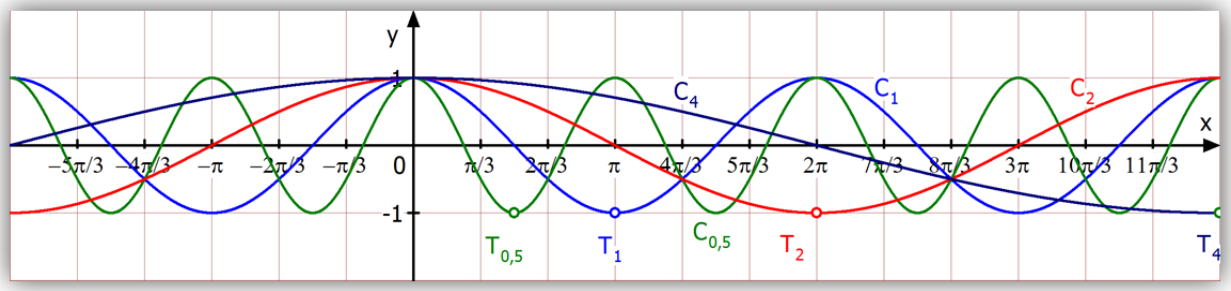
Durch die Streckung wird der x-Wert verdoppelt: $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$. Punkt $B'\left(\frac{2}{3}\pi \mid 0{,}87\right)$.

Der vierte Wert ist $\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1$.

Durch die Streckung wird der x-Wert verdoppelt: $\sin(\pi) = 1$. Punkt $C'(\pi \mid 1)$.

Diese Werte verwendet man dann auch für den Rest der Kurve, und natürlich auch bei Kosinuskurven, die nur verschobene Sinuskurven sind.

Beispiel 4 *Streckung von* $y = \cos(x)$ in x-Richtung:



Diese Abbildung zeigt 4 Kurven der Schar $y = \cos\left(\frac{1}{k}x\right)$, die alle aus $y = \cos(x)$ durch Streckung in x-Richtung mit dem Faktor k entstehen. Als Punkt-Merkmal ist je ein Tiefpunkt eingezeichnet:

C_1 ist die nicht gestreckte Kosinuskurve: $\boxed{y = \cos(x)}$, **mit der Periode** 2π.

C_2 wurde mit k = 2 in x-Richtung gestreckt: $\boxed{y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)}$, **mit der Periode** 4π

C_4 wurde mit k = 4 in x-Richtung gestreckt: $\boxed{y = \cos\left(\frac{1}{4}x\right)}$, **mit der Periode** 8π

$C_{0,5}$ wurde mit $k = \frac{1}{2}$ in x-Richtung gestreckt: $\boxed{y = \cos(2x)}$, **mit der Periode** π

Da hier 0 < k < 1 ist, nennt man diese „Streckung“ eine Stauchung.

Wenn man die Kurve $y = \sin(x)$ in x-Richtung mit dem Faktor k_1 streckt und in y-Richtung mit dem Faktor k_2 hat die Bildkurve die Gleichung $\mathbf{y = k_2 \cdot \sin\left(\frac{1}{k_1}x\right)}$.

Beispiel 5 $y = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ ist eine in x-Richtung und in y-Richtung mit dem Faktor k = 2 gestreckte Sinuskurve.

Wird in beiden Richtungen mit dem gleichen Faktor gestreckt, dann liegt eine zentrische Streckung vom Ursprung aus vor.

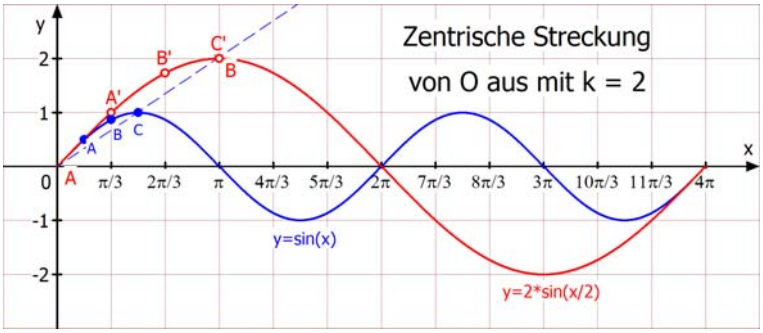


Abbildung:	$y = \sin(x)$	$\xrightarrow[\text{Streckung}]{\text{zentrische}}$	$y = 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$
Für Punkte gilt:	$O(0 \mid 0)$	$\xrightarrow[\text{Streckung}]{\text{zentrische}}$	$O'(0 \mid 0)$
	$A\left(\frac{1}{6}\pi \mid \frac{1}{2}\right)$	$\xrightarrow[\text{Streckung}]{\text{zentrische}}$	$A'\left(\frac{\pi}{3} \mid 1\right)$
	$B\underbrace{\left(\frac{1}{3}\pi \mid \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}_{\approx(1{,}05 \mid 0{,}87)}$	$\xrightarrow[\text{Streckung}]{\text{zentrische}}$	$B'\left(\frac{2}{3}\pi \mid \frac{1}{2}\right)$
	$C\left(\frac{1}{2}\pi \mid 1\right)$	$\xrightarrow[\text{Streckung}]{\text{zentrische}}$	$C'(\pi \mid 1)$

Beispiel 6 $y = 3\cos(2x)$ In x-Richtung mit $k_1 = \frac{1}{2}$ gestaucht, in y-Richtung mit k_2 = 3 gestreckt.

Durch die Stauchung in x-Richtung ist die Periode nur noch π. Die Abb. zeigt also zwei Perioden (Wellen).

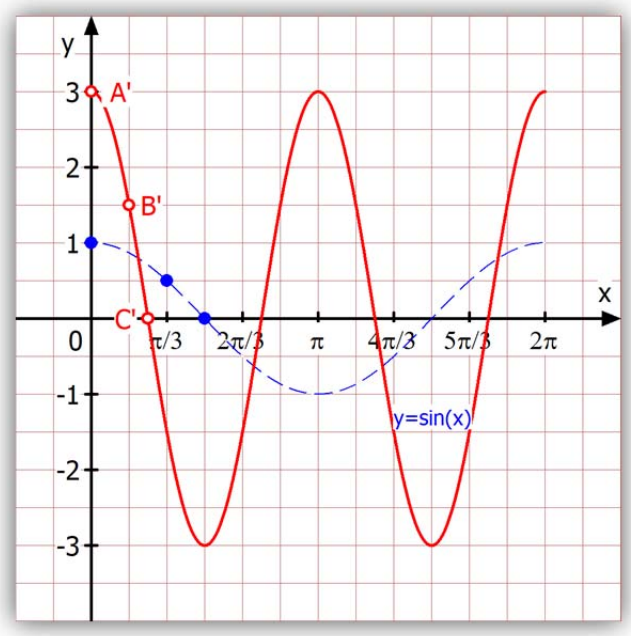
Durch diese Stauchung zeichnet man 90°, also $\frac{\pi}{2}$ bei 1,5 ein. Also nimmt man als Zwischenwerte günstigerweise $x_2 = \frac{\pi}{6}$ und $\frac{\pi}{2}$.

Und so rechnet man:

$A(0 \mid 1) \rightarrow A'(0 \mid 3)$

$B\left(\frac{\pi}{3} \mid \frac{1}{2}\right) \rightarrow B'\left(\frac{\pi}{6} \mid \frac{3}{2}\right)$

$C\left(\frac{\pi}{2} \mid 0\right) \rightarrow C'\left(\frac{\pi}{4} \mid 0\right)$



4 Gestreckt und dann verschoben

Hier bekommt man Probleme, wenn man nicht auf die Reihenfolge achtet: Wenn eine Kurve in y-Richtung gestreckt wird, darf sie nur in x-Richtung verschoben sein, sonst stimmt das Ergebnis nicht mehr. Mehr dazu findet man in dem sehr ausführlichen Text 16140.

Beispiel 7 $y = 2 \cdot \cos\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$

Diese Kurve entsteht durch Verschiebung um $\frac{2}{3}\pi$ nach rechts und dann durch Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2. Dadurch ist der ursprüngliche Hochpunkt $H(0\,|\,1)$ nach $A\left(\frac{2}{3}\pi\,|\,2\right)$ bewegt worden. (Ich habe die y-Achse verschoben).

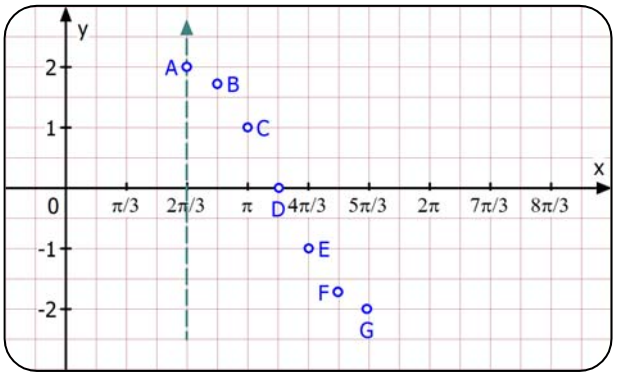
Nun gehen wir in x-Richtung um jeweils ein Kästchen ($\frac{\pi}{6}$) weiter und verwenden als y-Koordinaten die geeigneten verdoppelten Kosinuswerte:

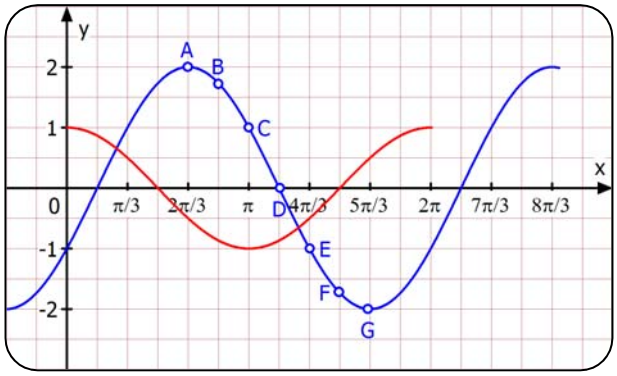
Für B ist das $2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3} \approx 1{,}7$

Für C ist das $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Für D bleibt das die 0.

E, F und G erhalten die analogen Werte nach unten, usw.





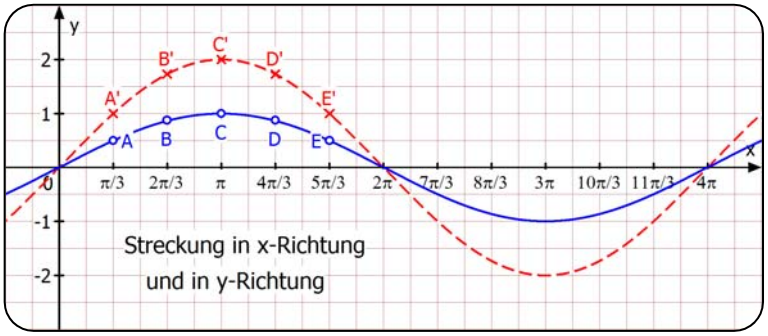
Beispiel 8 $y = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$

$y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ entsteht durch Streckung in x-Richtung mit dem Faktor 2.

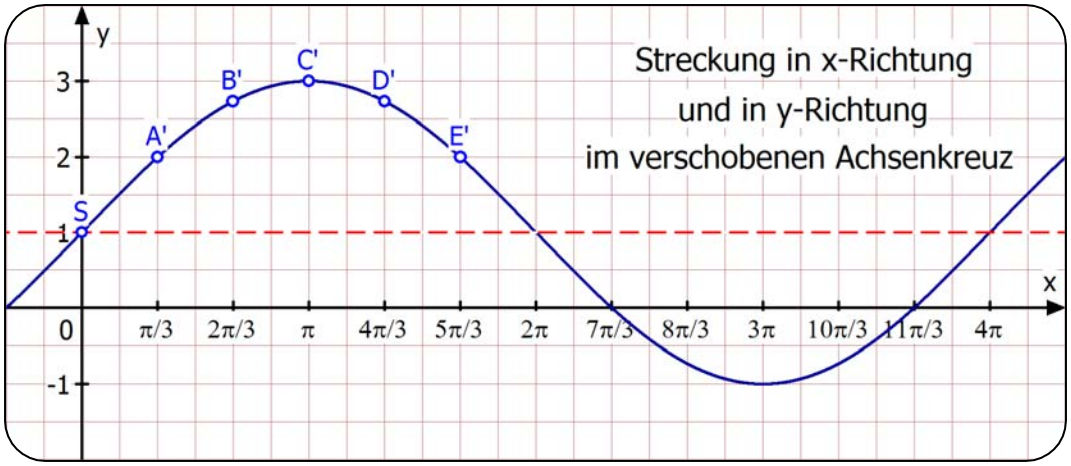
Dann wird in y-Richtung mit dem Faktor 2 gestreckt: $y = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.

Die y-Koordinaten wurden dabei verdoppelt, z. B. für B: $x_B = \frac{2}{3}\pi$ mit

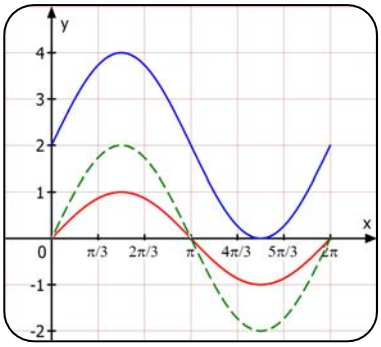
$y_B = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx \frac{1}{2} \cdot 1{,}732 \approx 0{,}87$



Ich zeichne die gestreckte Kurve in das um 1 in y-Richtung verschobene Achsenkreuz.



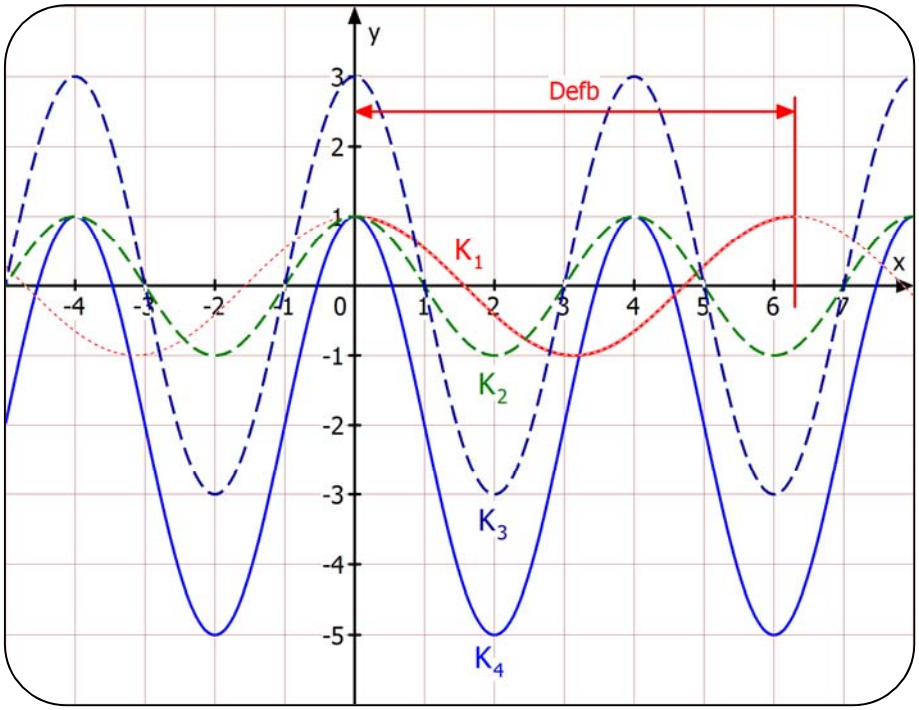
Beispiel 9 $y = 2 \cdot \sin(x) + 2$



$y = \sin(x) \xrightarrow[k=2]{\text{y-Streckung}} y = 2 \cdot \sin(x) \xrightarrow[+2]{\text{y-Versch.}} y = 2 \cdot \sin(x) + 2$

Beispiel 10 $y = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) - 2$ für $x \in [0\,;2\pi]$

$y = \cos(x) \xrightarrow[k_x = 2/\pi]{\text{x-Streckung}} y = \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) \xrightarrow[k_y = 3]{\text{y-Streckung}} y = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) \xrightarrow[-2]{\text{y-Versch}} y = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) - 2$



$y = \cos(x)$ hat in $[0\,;2\pi]$ die Hochpunkte $H_1(0\,|\,1)$ und $H_2(2\pi\,|\,1)$ und den Tiefpunkt $T(\pi\,|\,-1)$.

Durch Streckung in x-Richtung mit $k_x = \frac{2}{\pi}$ wird daraus $H_1(0\,|\,1)$ und $H_2(4\,|\,1)$ sowie $T(2\,|\,-1)$ (K2).

Durch Streckung in y-Richtung mit $k_y = 3$ wird daraus $H_1(0\,|\,3)$ und $H_2(4\,|\,3)$ sowie $T(2\,|\,-3)$ (K3).

Die abschließende Verschiebung ergibt $H_1(0\,|\,1)$ und $H_2(4\,|\,1)$ und $T(2\,|\,-5)$ (K4).

Beispiel 11

$y = -2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$ für $x \in [0\,;\,4\pi]$

f hat die **Periode** $\Delta x = 4\pi$, was der Streckfaktor $k_x = 2$ bewirkt, der aus $\frac{1}{2}$ entsteht.

$$y = -2\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) + 1$$

Streckfaktor in y – Richtung: $k_y = -2$

Streckfaktor in x – Richtung: $k_x = 2$

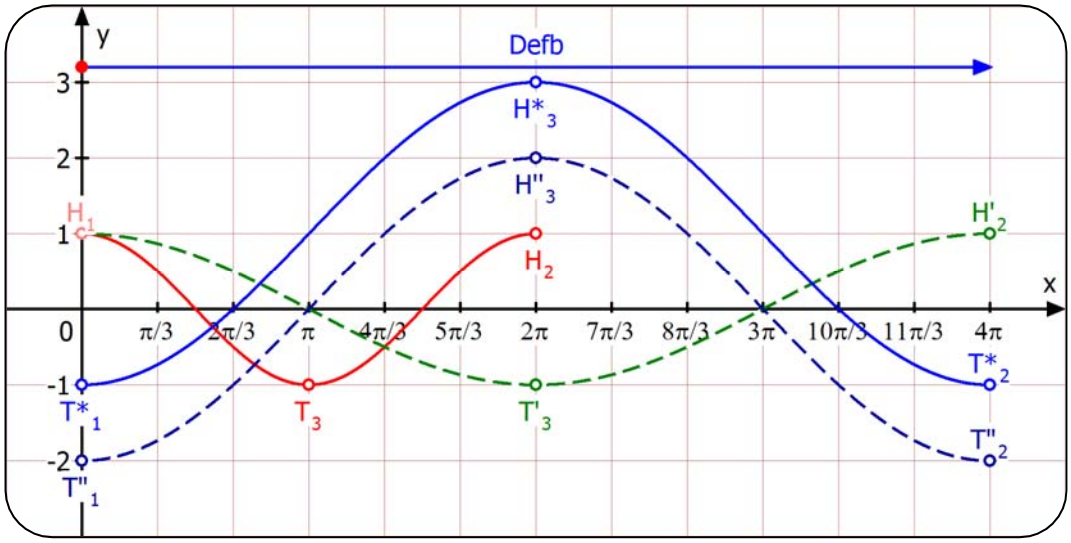
Verschiebung in y – Richtung: um 1

Kurven-Abbildung:

$$y = \cos(x) \xrightarrow[\text{x–Ri.}]{\text{Str.}} y = \cos\left(\tfrac{1}{2}\cdot x\right) \xrightarrow[\text{y–Ri.}]{\text{Str.}} y = -2\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) \xrightarrow[\text{y–Ri.}]{\text{Versch.}} y = -2\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) + 1$$

Dabei werden diese Extrempunkte wie folgt abgebildet:

$H_1(0\,|\,1)$	$H_1'(0\,|\,1)$	$T_1''(0\,|\,-2)$	$T_1^*(0\,|\,-1)$
$H_2(2\pi\,|\,1)$	$H_2'(4\pi\,|\,1)$	$T_2''(4\pi\,|\,-2)$	$T_2^*(4\pi\,|\,-1)$
$T_3(\pi\,|\,-1)$	$T_3'(2\pi\,|\,-1)$	$H_3''(2\pi\,|\,2)$	$H_3^*(2\pi\,|\,3)$



Am schwersten ist die Analyse von Kurven, die in x-Richtung Streckung <u>und</u> Verschiebung aufweisen. Ich zeige eine Methode, die darauf beruht, dass zuerst gestreckt und dann erst verschoben wird. Dazu geht man so vor:

Beispiel 12 $y = \sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) - 1$

Zuerst muss man den Streckfaktor 2 im Sinus-Argument ausklammern: $y = \sin\left[2\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right] - 1$

Diese Kurve entsteht aus $y = \sin(x)$ durch eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $k = \frac{1}{2}$,

also eine Stauchung, mit anschließender Verschiebung um $\frac{1}{4}\pi$ nach rechts,

Übersicht:

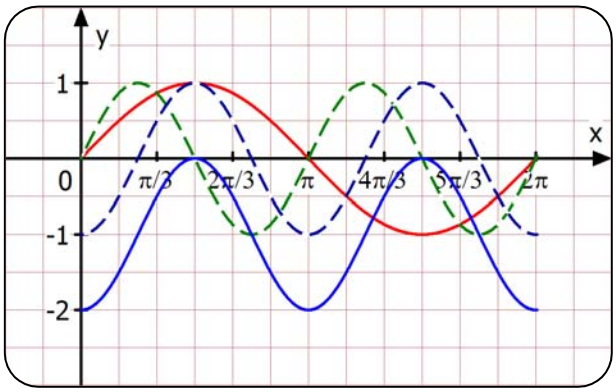
$$y = \sin\left(2 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right) - 1$$

Streckfaktor in x – Richtung: $k_x = \frac{1}{2}$	Verschiebung in x – Richtung: um $\frac{1}{4}\pi$	Verschiebung in y – Richtung: um -1

Die Funktion hat die **Periode** $\Delta x = \pi$, was der Streckfaktor $k_x = \frac{1}{2}$ bewirkt.
Die Kurve $y = \sin x$ hat in $[0\,;2\pi]$ den Hochpunkt $H\left(\frac{1}{2}\pi \mid 1\right)$. Die Stauchung macht daraus $H\left(\frac{1}{4}\pi \mid 1\right)$.
Die Verschiebung um $\frac{1}{4}\pi$ in x-Richtung ergibt $H\left(\frac{1}{2}\pi \mid 1\right)$
Die abschließende Verschiebung um 1 nach unten liefert den endgültigen Hochpunkt $H\left(\frac{1}{2}\pi \mid 0\right)$.

Analog dazu verändert man den Tiefpunkt:

$T\left(\frac{3}{2}\pi \mid -1\right) \to T\left(\frac{3}{4}\pi \mid -1\right) \to T(\pi \mid -1) \to T(\pi \mid -2)$.



Beispiel 13

$y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right)$

Den x-Faktor $\frac{1}{2}$ muss man ausklammern, damit man erkennt, dass in x-Richtung mit k = 2 (Kehrwert!) gestreckt wird und eine Verschiebung um $\frac{1}{2}\pi$ in x-Richtung vorliegt:

$$y = \sin x \xrightarrow[k=2]{\text{x-Streckung}} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \xrightarrow{\text{x-Versch.}} \sin\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\pi\right)$$

Zuerst wird immer die Streckung ausgeführt!